



**Universidad Nacional Mayor de San Marcos**

**Universidad del Perú. Decana de América**

**Facultad de Ciencias Matemáticas**

**Escuela Profesional de Computación Científica**

**Solución a un sistema no lineal vía el Teorema de  
Weierstrass generalizado**

**TESIS**

**Para optar el Título Profesional de Licenciada en Computación  
Científica**

**AUTOR**

**Karina Dengse ESCALANTE ZEGARRA**

**ASESOR**

**Eugenio CABANILLAS LAPA**

**Lima, Perú**

**2019**



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

## Referencia bibliográfica

---

Escalante, K. (2019). *Solución a un sistema no lineal vía el Teorema de Weierstrass generalizado*. Tesis para optar el título profesional de Licenciada en Computación Científica. Escuela Profesional de Computación Científica, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

---

## HOJA DE METADATOS COMPLEMENTARIOS

Código ORCID del autor: No cuento con este código.

Código ORCID del asesor: 0000-0002-8941-4394

DNI del autor: 44535652

Grupo de investigación: Ecuación de Kirchhoff (ECUKI)

Institución que financia parcial o totalmente la investigación: Vicerrectorado de Investigación y Postgrado de la UNMSM

Ubicación geográfica donde se desarrolló la investigación:

Campus: Ciudad Universitaria (Av. Universitaria s/n – Av. Venezuela cdra. 34, Lima Perú)

Coordenadas Geográficas: 120 03' 30"S 770 05' 00"O

Año o rango de años que la investigación abarcó: 2018 - 2019



UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Escuela Profesional de Computación Científica

ACTA DE SUSTENTACION DE TESIS PARA OBTENER EL TITULO PROFESIONAL DE  
LICENCIADO EN COMPUTACIÓN CIENTÍFICA

En la Ciudad Universitaria, Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 16:00 hrs. del  
miércoles 11 de diciembre del 2019, se reunieron los miembros del Jurado Evaluador:

|                                   |                |
|-----------------------------------|----------------|
| Mg. Edinson Raúl Montoro Alegre   | Presidente     |
| Mg. Willy David Barahona Martínez | Miembro        |
| Dr. Eugenio Cabanillas Lapa       | Miembro Asesor |

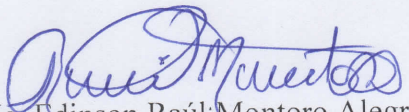
Para la sustentación de la tesis intitulada «SOLUCIÓN A UN SISTEMA NO LINEAL VÍA EL  
TEOREMA DE WEIERSTRASS GENERALIZADO», presentada por el bachiller KARINA DENGSE  
ESCALANTE ZEGARRA, para obtener el Título Profesional de Licenciada en Computación  
Científica.

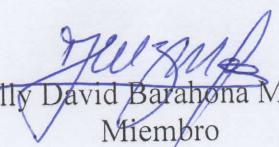
Luego de la exposición de la Tesis, el Presidente invitó a la expositora a dar respuesta a las  
preguntas formuladas.


Realizada la evaluación correspondiente por los miembros del jurado, la expositora mereció  
la aprobación Sobresaliente, con un calificativo promedio de  
Dieciocho (18) (Números y letras).

A continuación, los miembros del jurado, dan manifiesto que el bachiller KARINA DENGSE  
ESCALANTE ZEGARRA, en virtud de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesta  
para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciada en Computación Científica.

Siendo las 17:00 horas, se levantó la Sesión, firmando para constancia la presente ACTA en  
tres (3) copias originales.

  
Mg. Edinson Raúl Montoro Alegre  
Presidente

  
Mg. Willy David Barahona Martínez  
Miembro

  
Dr. Eugenio Cabanillas Lapa  
Miembro Asesor

*"La vida no es fácil, para ninguno de nosotros. Pero... ¡qué importa! Hay que perseverar y, sobre todo, tener confianza en uno mismo. Hay que sentirse dotado para realizar alguna cosa y que esa cosa hay que alcanzarla, cueste lo que cueste."*

-Marie Curie-

# Dedicatoria

Dedico este trabajo a Dios, a mis padres Joaquín y Gloria, a mis hermanos Tatiana y Miguel y a mi novio Juan Carlos, porque incondicionalmente me motivan e impulsan a lograr mis objetivos.

# Agradecimientos

Son muchas las personas que han contribuido al proceso y conclusión de este trabajo.

Primero a Dios, por haberme dado salud para poder culminar una de mis metas y por haber puesto en mi camino aquellas personas que han sido mi soporte y compañía durante los años de estudio.

Agradecer a mis padres Joaquín Escalante Saavedra y Gloria Zegarra Torres quienes fueron una pieza importante para dar inicio a mi vida profesional, y siempre están conmigo en todo momento, gracias por darme impulso a seguir avanzando cada día más.

También agradecer a mis hermanos Tatiana y Miguel, por sus consejos para que me esforzaré en lograr terminar este trabajo.

A mi novio Juan Carlos Sánchez Vera, gracias por tu comprensión, paciencia y apoyo incondicional.

Deseo expresar un sincero reconocimiento y agradecimiento a mi asesor de Tesis, Dr. Eugenio Cabanillas Lapa por su incondicional apoyo, orientación y dedicación en el desarrollo de esta tesis.

Agradecer a la Universidad Mayor de San Marcos por mi formación profesional y a cada uno de mis maestros en todos estos años de estudio de pregrado.



# Índice general

|   |      |
|---|------|
| Índice general  | VI   |
| Resumen . . . . .   | VII  |
| Abstract . . . . .  | VIII |
| Índice de figuras   | IX   |
| Introducción  | 1    |
| 1. Resultados y Preliminares  | 4    |
| 1.1. Propiedades de la Convergencia Débil . . . . .                       | 5    |
| 1.2. Minimización en $\mathbb{R}^n$ . . . . .                             | 9    |
| 1.3. Soluciones Numéricas de Sistemas de Ecuaciones No Lineales . . . . . | 14   |
| 1.3.1. Método del Punto Fijo en $\mathbb{R}^n$ . . . . .                  | 14   |
| 1.3.2. Método de Newton para Sistemas No Lineales . . . . .               | 15   |
| 1.3.3. Método de Broyden . . . . .  | 18   |
| 2. El Resultado Principal   | 20   |
| 2.1. Aplicación . . . . .   | 24   |
| 3. Simulación Numérica  | 25   |
| Anexos  | 37   |
| Conclusiones  | 42   |
| Bibliografía  | 43   |

## RESUMEN

# SOLUCIÓN A UN SISTEMA NO LINEAL VÍA EL TEOREMA DE WEIERSTRASS GENERALIZADO

KARINA DENGSE ESCALANTE ZEGARRA

Diciembre - 2019

Orientador: Dr. Eugenio Cabanillas Lapa

Título Obtenido: Licenciada en Computación Científica

---

En este trabajo, estudiamos la existencia de soluciones reales no nulas para un sistema de ecuaciones no lineales de la forma

$$Au = \lambda F(u)$$

donde  $u$  es un vector columna en  $\mathbb{R}^n$ ,  $A$  es una matriz definida positiva de orden  $n \times n$  y  $F$  es una función no lineal en  $\mathbb{R}^n$ . Mediante el uso del Teorema Generalizado de Weierstrass obtenemos el resultado de existencia.

Palabras claves: Teorema Generalizado de Weierstrass, Sistemas de ecuaciones No Lineales, Matriz definida positiva

## ABSTRACT

# SOLUTION TO A NONLINEAR SYSTEM VIA THE GENERALIZED WEIERSTRASS THEOREM

KARINA DENGSE ESCALANTE ZEGARRA

December - 2019

Advisor: Dr. Eugenio Cabanillas Lapa

Obtained Title: Degree in Scientific Computing

---

In this work, we study the existence of nonzero real solutions for a system of nonlinear equations of the form

$$Au = \lambda F(u)$$

Where  $u$  is a column vector in  $\mathbb{R}^n$ ,  $A$  is a given  $n \times n$  positive definite matrix and  $F$  is a nonlinear function in  $\mathbb{R}^n$ . By using the Generalized Weierstrass Theorem we get our result of existences.

Keywords: Generalized Weierstrass Theorem, System of nonlinear equations, Positive definite matrix

# Índice de figuras

|  |    |
|--|----|
| 3.1. Solución No Trivial del Ejemplo 3.1 . . . . .         | 27 |
| 3.2. Primera Solución No Trivial del Ejemplo 3.2 . . . . . | 29 |
| 3.3. Segunda Solución No Trivial del Ejemplo 3.2 . . . . . | 30 |
| 3.4. Primera Solución No Trivial del Ejemplo 3.3 . . . . . | 32 |
| 3.5. Segunda Solución No Trivial del Ejemplo 3.3 . . . . . | 33 |
| 3.6. Primera Solución No Trivial del Ejemplo 3.4 . . . . . | 35 |
| 3.7. Segunda Solución No Trivial del Ejemplo 3.4 . . . . . | 36 |

# Introducción

Esta investigación es motivada por el siguiente problema físico, donde suponemos que los cuerpos  $u_1, u_2, \dots, u_n$  se ubican en las posiciones  $1, 2, \dots, n$  del eje real respectivamente. Sea  $u_k^t$  la temperatura del cuerpo en la posición  $k$  y en el tiempo  $t$ . En el momento  $t$ , si la temperatura  $u_{k-1}^t$  es superior a  $u_k^t$ , el calor fluirá del cuerpo  $k-1$  a  $k$ . El incremento de temperatura es  $u_k^{t+1} - u_k^t$ , y es razonable postular que el incremento es proporcional a  $u_{k-1}^t - u_k^t$ , es decir,  $r(u_{k-1}^t - u_k^t)$  donde  $r$  es la constante positiva de la velocidad de difusión. De manera similar, si la temperatura  $u_{k+1}^t$  es mayor que  $u_k^t$ , el calor fluirá desde el cuerpo  $k+1$  a  $k$ . Por otro lado, también suponemos que los cuerpos  $u_0$  y  $u_{n+1}$  mantienen siempre la temperatura 0. Por lo tanto, es razonable postular que el efecto total corresponde a una Ley Discreta del Enfriamiento de Newton de la forma:

$$\Delta_1 u_k^t = r \Delta_2^2 u_{k-1}^t, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad t \in \mathbb{N} \quad (1)$$

Con la condición de valor de frontera:

$$u_0^t = 0 = u_{n+1}^t, \quad t \in \mathbb{N} \quad (2)$$

Donde  $\Delta_1 u_k^t = u_k^{t+1} - u_k^t$  y  $\Delta_2^2 u_{k-1}^t = u_{k+1}^t - 2u_k^t + u_{k-1}^t$ . Cuando la temperatura inicial está dado por  $\{u_k^0\}_{k=0}^{n+1}$ , la ecuación (1) es fácil de resolver por iteración.

Observamos que las fuentes de calor no han sido considerados en la anterior reacción de difusión. Asumimos que hay una fuente de calor para cada cuerpo  $u_k$  y que es una función  $f_k$  de  $u_k^{(t)}$ . En este caso, la reacción de difusión puede ser expresada en la forma:

$$\Delta_1 u_k^t = r \Delta_2^2 u_{k-1}^t + f_k(u_k^t), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad t \in \mathbb{N} \quad (3)$$

Si el sistema está lateralmente aislado, la temperatura constante en el sistema puede satisfacer la siguiente ecuación:

$$r\Delta^2 u_{k-1} + f_k(u_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

O

$$\Delta^2 u_{k-1} + \lambda f_k(u_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (5)$$

Con la condición de frontera:

$$u_0 = 0 = u_{n+1} \quad (6)$$

En este trabajo, consideramos la existencia de soluciones para (5) - (6) mediante un método variacional. En general, notamos que (5) no puede considerarse como el análogo discreto de la ecuación diferencial

$$x''(t) + f(t, x(t)) = 0, \quad 0 < t < 1 \quad (7)$$

Ya que en (5) las fuentes de calor  $f_1, f_2, \dots, f_n$  pueden ser diferentes funciones.

Usualmente, en (7) se supone que satisface que la función  $f$  es continua. Naturalmente, en el análogo discreto:

$$\Delta^2 u_{k-1} + f(k, u_k) = 0, \quad (8)$$

La función  $f$  satisface una condición similar, que ya ha sido estudiada (ver [9, 15]). Este trabajo ha sido motivado por [16]. En [16], Zhang y Yang estudian la existencia de soluciones periódicas y soluciones subarmónicas de las ecuaciones diferenciales superlineales de 2do orden. Se ha observado resultados similares para ecuaciones en diferencias finitas.

Este trabajo está escrito como sigue:

En el Capítulo 1 presentamos los preliminares y resultados teóricos usados a lo largo de esta tesis, tomando como referencia [1], [2], [6], [10], [11].

En el Capítulo 2, con la finalidad de aplicar nuestra metodología de trabajo a una gran variedad de problemas, colocamos el problema (5)-(6) en un contexto

operacional abstracto. Así el problema puede ser expresado en la forma matricial siguiente:

$$Au = \lambda F(u) \tag{9}$$

donde:  $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ ,  $F(u) = \begin{bmatrix} f_1(u_1) \\ f_2(u_2) \\ \vdots \\ f_n(u_n) \end{bmatrix}$  y  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Aquí se encuentra el resultado principal de esta Tesis, que consiste en aplicar las técnicas del Cálculo Variacional, en particular el Teorema de Weierstrass Generalizado, para mostrar la existencia de soluciones al problema (9), y en consecuencia al problema (5)-(6).

En el Capítulo 3, mostramos un algoritmo numérico implementando los métodos de Newton y Broyden para sistemas de ecuaciones no lineales a través de MATLAB, también realizamos el análisis numérico de tres sistemas de ecuaciones no lineales aplicando el resultado principal, además realizamos una aplicación a un fenómeno físico considerando las ecuaciones 4, 5 y 6.

Finalmente tenemos las conclusiones con sugerencias para trabajos futuros. En los anexos presentamos los algoritmos de Newton y Broyden, así como también encontramos el código de implementación en MATLAB que aproxima las soluciones de los sistemas de ecuaciones no lineales .

# Capítulo 1

## Resultados y Preliminares

A continuación, en el presente capítulo se enunciarán conceptos de mucha importancia para el desarrollo del Capítulo 2 y Capítulo 3, dichos conceptos se encuentran en las referencias [1], [2], [6], [10], [11], [12]

**Definición 1.1** (Distancia). *Dado un conjunto  $X$ , una distancia es una aplicación  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  que a cada par  $(x, y) \in X \times X$  se le asocia un número real  $d(x, y)$  y que cumple las siguientes condiciones:*

1.  $d(x, y) \geq 0$
2.  $d(x, y) = 0$  si, y sólo si  $x = y$  (Separación)
3.  $d(x, y) = d(y, x)$  para todo  $x, y \in X$  (Simetría)
4.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  para todo  $x, y \in X$  (Desigualdad Triangular)

En estas condiciones, se dice que el par  $(X, d)$  es un **espacio métrico**

**Ejemplo 1.** *El espacio métrico de los números reales con la métrica del valor absoluto de la diferencia, es decir  $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $d(x, y) = |x - y|$*

**Definición 1.2** (Espacio completo). *Un espacio métrico es completo cuando toda sucesión de Cauchy en este espacio es convergente.*

**Definición 1.3** (Espacio de Banach). *Un espacio vectorial normado que es completo, para la métrica inducida por la norma, se llama espacio de Banach.*

**Definición 1.4** (Espacio separable). *Un espacio métrico  $E$  se dice que es separable si existe un subconjunto  $D \subset E$ , tal que  $D$  es numerable y denso en  $E$ .*



**Definición 1.5** (Espacio de Hilbert). *Un espacio vectorial con producto interno  $V$ , se denomina un espacio de Hilbert  $V$ , si  $V$  es un espacio de Banach con la norma inducida por el producto interno.*

Sea  $E$  un espacio de Banach y  $f \in E'$ . La notación  $\langle f, x \rangle$  indica la funcional  $f$  calculado en  $x$  es decir  $f(x) \equiv \langle f, x \rangle$ ,  $f \in E'$ ,  $x \in E$ . Aquí  $E'$  es el dual de  $E$  dado por  $E' = \{f : E \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ es lineal y continua}\}$ . Provisto de la norma  $\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$  y  $E''$  bidual provisto de la norma  $\|\xi\| = \sup_{f \in E'; \|f\| \leq 1} |\langle \xi, f \rangle|$ .

Si  $E$  es un espacio normado, se dice que  $x_n \rightarrow x$  fuerte en  $E$  si  $\|x_n - x\|_E \rightarrow 0$ .

Dada una sucesión  $(x_n)_{n \geq 1}$  en  $E$ ,  $E$  es un espacio normado, diremos que  $(x_n)_{n \geq 1}$  converge débilmente a  $x$  (en  $E$ ), denotado por  $x_n \rightharpoonup x$ , si  $\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$ ,  $\forall f \in E'$ .

## 1.1. Propiedades de la Convergencia Débil

**Proposición 1.1.** *Sean  $(x_n)$  e  $(y_n)$  sucesiones en un espacio normado  $E$ :*

- *Si  $x_n \rightharpoonup x$  y  $x_n \rightharpoonup y$ , entonces  $x = y$ .*
- *Si  $x_n \rightarrow x$ , entonces  $x_n \rightharpoonup x$ .*
- *Si  $x_n \rightharpoonup x$  y  $y_n \rightharpoonup y$ , entonces  $x_n + y_n \rightharpoonup x + y$ .*
- *Si  $\alpha$  es un escalar y  $x_n \rightharpoonup x$ , entonces  $\alpha x_n \rightharpoonup \alpha x$ .*
- *Si  $x_n \rightharpoonup x$ , entonces existe alguna constante positiva  $M$  tal que  $\|x_n\| \leq M$  para todo  $n$ .*
- *Para que  $x_n \rightharpoonup x$  es necesario y suficiente que la sucesión  $\|x_n\|$  sea acotada y  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ , para todo  $f$  en  $E'$*

**Definición 1.6.** *Sea  $E$  un espacio de Banach y sea  $J$  la inyección canónica de  $E$  en  $E''$ . Se dice que  $E$  es reflexivo si  $J(E) = E''$*

**Proposición 1.2.** *Todo espacio de Hilbert es reflexivo.*

**Demostración:** Ver [1], página 128. ■

**Teorema 1.1.** *Sea  $E$  un espacio de Banach. Entonces  $E$  es reflexivo si y sólo si*

$$B_E = \{x \in E, \|x\| \leq 1\}$$

**Demostración:** Ver [2], página 44. ■

**Teorema 1.2.** *Sea  $H$  un espacio de Hilbert y  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una secuencia acotada en  $H$ . Entonces existe una subsucesión  $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  débilmente convergente en  $H$ .*

**Demostración:** Ver [2], página 50. ■

**Definición 1.7.** *Sea  $X$  un espacio de Banach y  $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  un funcional acotado inferiormente i.e.*

$$\inf \Phi > -\infty$$

*Decimos que la sucesión  $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$  es una sucesión minimizante si*

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \Phi(x_j) = \inf_{x \in X} \Phi(x) \quad (1.1)$$

*El funcional  $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  es semicontinuo inferiormente (o s.c.i) si  $x_j \rightarrow x$ , implica:*

$$\Phi(x) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \inf \Phi(x_j) \quad (1.2)$$

*Por otra parte, decimos que el funcional  $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  es débilmente semicontinuo inferiormente (o d.s.c.i) si  $x_j \rightharpoonup x$ , implica:*

$$\Phi(x) \leq \lim_{j \rightarrow +\infty} \Phi(x_j) \quad (1.3)$$

**Definición 1.8.** *Un espacio topológico es un par  $(X, \tau)$ , donde  $X$  es un conjunto, y  $\tau$  es una familia de subconjuntos de  $X$  que verifica las siguientes condiciones:*

1.  $X \in \tau$  y  $\emptyset \in \tau$
2. Dada una familia  $\{A_i \in \tau, i \in I\}$  de elementos de  $\tau$ , su unión  $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$  también está en  $\tau$ .
3. Si  $A_1, A_2 \in \tau$ , entonces  $A_1 \cap A_2 \in \tau$  (la intersección de dos elementos de la familia  $\tau$  también es un elemento de la familia).

*Diremos entonces, que la familia  $\tau$  es una topología sobre  $X$ , y a sus elementos les llamaremos conjuntos abiertos de  $(X, \tau)$ .*

**Ejemplo 2** (Topología asociada a una métrica). *Todo espacio métrico  $(X, d)$  tiene asociado un espacio topológico  $(X, \tau_d)$ , donde  $\tau_d$  es la familia de los conjuntos abiertos de  $X$  para la distancia  $d$  tal y como está definido.*

**Definición 1.9** (Cubrimiento). *Sea  $X$  un conjunto y sea  $S \subset X$ . Un cubrimiento de  $S$  es una familia  $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$  de subconjuntos de  $X$  tales que  $S = \bigcup_{i \in I} A_i$ . Un subcubrimiento es una subfamilia  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$  que es también un cubrimiento de  $S$ . Un cubrimiento se dice que es finito si está formado por una cantidad finita de conjuntos. En el caso de que  $(X, \tau)$  sea un espacio topológico,  $S \subset X$  y  $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$  sea un cubrimiento de  $S$  tal que cada  $A_i$  sea un abierto de  $(X, \tau)$ , se dice que  $\mathcal{A}$  es un cubrimiento abierto de  $S$ .*

**Definición 1.10** (Espacio Compacto). *Diremos que un espacio topológico  $(X, \tau)$  es compacto si todo cubrimiento abierto de  $X$  admite un subrecubrimiento finito.*

El Teorema de Existencia de Weierstrass Clásico nos dice, en resumen, que el problema de minimización: hallar  $u_0 \in U \subseteq X$  tal que

$$J(u_0) = \inf_{u \in U} J(u) \quad (1.4)$$

tiene solución si  $J : U \subseteq X \rightarrow \mathbb{R}$  es continuo,  $U$  es un conjunto compacto y  $\dim X < \infty$

**Ejemplo 3.** *Si  $U = [a, b]$  y  $J : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es continuo, existe un máximo y un mínimo en  $[a, b]$ . Más aún,  $J$  es acotado.*

Observamos que hay funciones continuas en  $\mathbb{R}$  que no tienen esta propiedad.

**Ejemplo 4.**  $J : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $J(u) = -u^2 + 1$ ,  $U \in \mathbb{R}$ .  $J$  es continua, no está acotada inferiormente ni alcanza su mínimo en  $\mathbb{R}$

Así no basta la continuidad del funcional  $J$  para resolver el problema de hallar  $u_0 \in U$  tal que:

$$J(u_0) = \inf_{u_0 \in U} J(u) \quad (1.5)$$

Necesitamos una condición más relacionada con el comportamiento de la función, tal como la compacidad en  $X$ . En efecto, el ejemplo 2 muestra que si  $J : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es

continua, al ser restringida sobre un intervalo compacto  $I$  (cerrado y acotado) tiene un mínimo en  $I$  (y también un máximo).

El siguiente teorema del Análisis Real, nos ofrece, si embargo un resultado de minimización, sin la exigencia de compacidad en el dominio, en espacios Euclídeos.

**Teorema 1.3.** *Si  $J : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua tal que*

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} J(u) = +\infty = \lim_{u \rightarrow -\infty} J(u) \quad (1.6)$$

*Entonces  $J$  alcanza un mínimo.*

El Teorema 1.3, será demostrado en un contexto más general (Ver Corolario 1.5.2).

Similarmente si  $X = \mathbb{R}^n$  y  $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continuo, se restringe a una bola cerrada, el problema 1.4 tiene solución, como veremos más adelante.

Desafortunadamente el Teorema de Weierstrass clásico no es útil cuando se trata de espacios de Banach de dimensión infinita, ya que las bolas cerradas no son compactas (en la topología de la norma)

**Definición 1.11.** *Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz simétrica, diremos que:*

- (a) *Es semidefinida positiva si  $x^t A x \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ;*
- (b) *Es definida positiva si  $x^t A x > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \neq 0$ ;*
- (c) *Es semidefinida negativa si  $x^t A x \leq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ;*
- (d) *Es definida negativa si  $x^t A x < 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \neq 0$ ;*
- (e) *Es indefinida si  $x^t A x > 0$  para algún  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $x^t A x < 0$  para otro  $x \in \mathbb{R}^n$ .*

**Teorema 1.4.** *Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz simétrica, entonces:*

- (a) *La matriz  $A$  es definida positiva si y sólo si todos sus autovalores de  $A$  son positivos;*
- (b) *La matriz  $A$  es semidefinida positiva si y sólo si todos sus autovalores de  $A$  son no negativos;*

- (c) La matriz  $A$  es definida negativa si y sólo si todos sus autovalores de  $A$  son negativos;
- (d) La matriz  $A$  es semidefinida negativa si y sólo si todos sus autovalores de  $A$  son no positivos;
- (e) La matriz  $A$  es indefinida si y sólo si tiene dos autovalores con signos opuestos.

**Demostración:** Ver [13], página 425. ■

## 1.2. Minimización en $\mathbb{R}^n$

**Teorema 1.5** (Teorema de Weiersstrass Generalizado). *Sea  $X$  un espacio topológico compacto,  $J : X \rightarrow \mathbb{R}$  un funcional s.c.i. Entonces  $J$  es acotado inferiormente y  $\exists u_0 \in X$  tal que*

$$J(u_0) = \inf_{u \in X} J(u) \quad (1.7)$$

**Demostración:** Observamos que

$$\mathbb{R} = \bigcup_{\nu=1}^{+\infty} ]-\nu, +\infty[ \quad (1.8)$$

Ahora como  $J$  es s.c.i. entonces  $J^{-1}(]-\nu, +\infty[)$  es abierto,  $\forall \nu \in \mathbb{N}$ .

Además nada difícil probar que

$$X = \bigcup_{\nu=1}^{+\infty} J^{-1}(]-\nu, +\infty[) \quad (1.9)$$

Como  $X$  es compacto existen  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$  tal que

$$X = \bigcup_{i=1}^h J^{-1}(]-\nu_i, +\infty[) \quad (1.10)$$

Sea  $\nu_0 = \max \{\nu_i : 1 \leq i \leq h\} \geq \nu_i \Rightarrow -\nu_0 \leq -\nu_i, \forall i / 1 \leq i \leq h$

$$\Rightarrow ]-\nu_0, +\infty[ \supseteq ]-\nu_i, +\infty[$$

Sea ahora  $u \in X \Rightarrow u \in J^{-1}(]-\nu_i, +\infty[)$  para algún  $i, 1 \leq i \leq h$

$$\Rightarrow J(u) \in ]-\nu_i, +\infty[ \subseteq ]-\nu_0, +\infty[$$

$$\Rightarrow J(u) \geq -\nu_0.$$

Así  $J$  está acotado inferiormente.

Sea

$$c = \inf_{u \in X} J(u) > -\infty$$

Supongamos, que  $\nexists u_0 \in X$  tal que

$$J(u_0) = c = \inf_{u \in X} J(u) \leq J(u), \quad \forall u \in X \quad (1.11)$$

Luego

$$J(u) > c, \quad \forall u \in X \quad (1.12)$$

De (1.12) también podemos expresar:

$$X = \bigcup_{\nu=1}^{+\infty} J^{-1} \left( \left[ c + \frac{1}{\nu}, +\infty \right) \right), \quad \left( J^{-1} \left( \left[ c + \frac{1}{\nu}, +\infty \right) \right) \text{ es abierto pues } J \text{ es s.c.i.} \right) \quad (1.13)$$

Ahora, como  $X$  es compacto,  $\exists \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_\ell$  tal que

$$X = \bigcup_{i=1}^{\ell} J^{-1} \left( \left[ c + \frac{1}{\nu_i}, +\infty \right) \right) \quad (1.14)$$

En consecuencia, si  $u \in X \Rightarrow \exists \nu_i, 1 \leq i \leq \ell, \quad u \in J^{-1} \left( \left[ c + \frac{1}{\nu_i}, +\infty \right) \right)$

Es decir,

$$J(u) > c + \frac{1}{\nu_i} \Rightarrow c = \inf J(u) \geq c + \frac{1}{\nu_i} > c \dots (\Rightarrow \Leftarrow) \quad (1.15)$$

Esta contradicción demuestra que  $\exists u_0 \in X$  tal que

$$J(u_0) = c = \inf_{u \in X} J(u) \quad (1.16)$$

■

**Corolario 1.5.1.** Sea  $(A, d)$  un espacio métrico compacto,  $J : A \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Entonces  $J$  alcanza un mínimo en  $A$ , es decir:

$$\exists u_0 \in A \quad \text{tal que} \quad J(u_0) = \min_{u \in A} J(u) = \inf J(u), \quad \forall u \in A \quad (1.17)$$

**Demostración:** Bastará aplicar el Teorema 1.5, con  $X = A$  y  $\tau$ : Topología inducida por la métrica. ■

**Corolario 1.5.2.** Sea  $X$  un espacio de Hilbert y suponga que  $J : X \rightarrow \mathbb{R}$  es:

i) Débilmente semicontinua inferiormente, esto es

$$u_\nu \rightharpoonup u \implies J(u) \leq \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \inf J(u_\nu)$$

ii) Coercivo, esto es:

$$\lim_{|u| \rightarrow +\infty} J(u) = +\infty$$

Entonces  $J$  es acotado inferiormente y existe  $u_0 \in X$  tal que

$$J(u_0) = \inf_{u \in X} J(u)$$

**Demostración:** Como  $J$  es coercivo, escogeremos  $R > 0$  tal que

$$J(u) \geq |J(0)| > J(0) \tag{1.18}$$

para  $u \in X$ , tal que  $|u| > R$

Por ser  $X$  de Hilbert, es reflexivo, luego la bola  $\overline{B(0, R)}$  es débilmente compacta (esto es, compacta pero con la topología débil). Así:

$$J|_{\overline{B(0, R)}} : (\overline{B(0, R)}, \tau_\omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

es semicontínuo inferiormente en un espacio topológico compacto (con la topología débil  $\tau_\omega$ ).

Por el Teorema de Weierstrass,  $J|_{\overline{B(0, R)}}$  es acotado inferiormente y existe  $u_0 \in \overline{B(0, R)}$  tal que

$$J(u_0) = \inf_{u \in \overline{B(0, R)}} J(u) \tag{1.19}$$

Como  $0 \in \overline{B(0, R)}$ , se tiene  $J(u_0) \leq J(0)$ , y por (1.18) se sigue que:

$$J(u_0) \leq J(u), \quad \forall |u| > R \tag{1.20}$$

De (1.19) y (1.20),  $J(u_0) \leq J(u)$ ,  $\forall u \in X$ . Así  $J$  es acotado inferiormente y existe  $u_0 \in X$  tal que

$$J(u_0) = \inf_{u \in X} J(u)$$

■

**Observación 1.** En particular para  $X = \mathbb{R}^m$ , la topología débil coincide con la topología fuerte, por lo que la semicontinuidad débil coincide con la semicontinuidad. Así podemos enunciar el siguiente resultado de minimización en  $\mathbb{R}^m$ .

**Corolario 1.5.3.** Sea  $J : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  continua y coerciva. Entonces existe  $u_0 \in \mathbb{R}^m$  tal que

$$J(u_0) = \inf_{u \in \mathbb{R}^m} J(u)$$

**Ejemplo 5.**  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  es una función coerciva, pues

$$\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} f(x, y) = \lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + y^2} = +\infty \quad (1.21)$$

**Ejemplo 6.** La función  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 3xy = (x^4 + y^4) \left(1 - \frac{3xy}{x^4 + y^4}\right)$  es coerciva, pues  $|x|, |y| > 1$ :

$$(x^4 + y^4) \left(1 - \frac{3xy}{x^4 + y^4}\right) \geq (x^4 + y^4) \left(1 - \frac{3xy}{2x^2y^2}\right) \rightarrow +\infty \quad (1.22)$$

**Ejemplo 7.** La función  $f(x, y, z) = e^{x^2} + e^{y^2} + e^{z^2} - x^{100} - y^{100} - z^{100}$  es coerciva ya que  $e^x$  crece más rápido que  $x^n$ .

**Ejemplo 8.** La función  $f(x, y) = ax + by + c$ ,  $(ab \neq 0)$  no es coerciva.

**Demostración:** Sea  $(x, y)$  tal que  $ax + by = 0$ . Entonces

$$\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow \infty} f(x, y) = c$$

Lo que contradice la definición de coercividad. ■

**Ejemplo 9.**  $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 3xyz - x^2 - y^2 - z^2$  es una función coerciva, pues  $x^4 + y^4 + z^4$  es un factor dominante.

**Ejemplo 10.** La función  $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$  no es coerciva.

**Demostración:** Tomemos  $x = y$  y  $\|(x, y)\| \rightarrow \infty$ . Entonces

$$\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} f(x, y) = 0$$

Por tanto no es coerciva. ■



**Definición 1.12** (Derivada según Fréchet). Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios normados y  $U$  un subconjunto abierto de  $X$ . Se dice que  $J : U \subseteq X \rightarrow Y$  es Fréchet-diferenciable en  $u_0 \in U$  si existe un operador lineal y continuo  $L : X \rightarrow Y$  tal que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|J(u_0 + h) - J(u_0) - L(h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0 \quad (1.23)$$

Si existe tal operador  $L$ , es único, y denotamos  $D_F J(u_0) \equiv DJ(u_0) \equiv L \equiv J'(u_0)$  y se llama derivada (según Fréchet) de  $J$  en  $u_0$  o simplemente  $F$ -derivada de  $J$  en  $u_0$ .

Si  $J$  es Fréchet-diferenciable en cada punto  $u \in U$ , diremos que  $J$  es  $F$ -diferenciable (o que  $J$  es diferenciable, simplemente)

Si la aplicación:

$$\begin{aligned} DJ : U &\rightarrow \mathcal{L}(X, Y) \\ u &\rightarrow (DJ)(u) = J'(u) \end{aligned}$$

es continua, se dice que  $J \in C'$ , donde  $\mathcal{L}(X, Y) = \{L : X \rightarrow Y / L \text{ es lineal y continua}\}$

**Observación 2.** Si  $J : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es  $F$ -diferenciable, se puede probar que:

$$(DJ)(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

coincide con la matriz jacobiana de  $J$ , en  $x_0$ , denotada por  $Jac(x_0)$ , esto es

$$(DJ)(x_0)(h) = Jac(x_0) \cdot h$$

**Definición 1.13** (Derivada según Gâteaux). La aplicación  $J : U \subseteq X \rightarrow Y$  es Gateaux-diferenciable (o  $G$ -diferenciable) en  $u_0 \in U$ , si existe  $L \in \mathcal{L}(X, Y)$  tal que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{J(u_0 + th) - J(u_0)}{t} - L(h) \right\|_Y = 0 \quad (1.24)$$

para cada  $h \in X$ , donde  $t \rightarrow 0$  en  $\mathbb{R}$ . La aplicación  $L$  se llama Derivada de  $J$ , según Gâteaux (o simplemente  $G$ -derivada de  $J$ ) en  $u_0$ . En este caso escribimos  $(D_G J)(u_0) \equiv L$

**Observación 3.**

1. Se demuestra que si  $J$  es  $F$ -diferenciable entonces  $J$  es  $G$ -diferenciable.
2. Si  $J$  es  $G$ -diferenciable en  $U$ , con derivada de Gâteaux continua, entonces  $J \in C'$

## 1.3. Soluciones Numéricas de Sistemas de Ecuaciones No Lineales

En esta sección presentamos las definiciones y teoremas para implementar los Métodos de Newton y Broyden, y resolver tres sistemas que ilustran el algoritmo numérico aplicado (Ver [3]).

**Definición 1.14.** *Un sistema de ecuaciones no lineales tiene la siguiente forma:*

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \end{aligned} \tag{1.25}$$

donde  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  y  $f_i$  es una función real no lineal para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Del sistema anterior, mediante la definición de una función  $F$  que mapea  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$  como:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n))^t$$

El sistema 1.25 también puede representarse de manera vectorial:

$$\mathbf{F}(x) = 0 \tag{1.26}$$

Las funciones  $f_1, f_2, \dots, f_n$  se denominan las **funciones coordenadas** de  $F$ .

### 1.3.1. Método del Punto Fijo en $\mathbb{R}^n$

**Definición 1.15.** *Una función real  $\mathbf{G}$  donde  $D \subset \mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$  tiene un **punto fijo** en  $p \in D$  si  $\mathbf{G}(p) = p$*

**Teorema 1.6.** *Sea  $D = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)^t \mid a_i \leq x_i \leq b_i \text{ para toda } i = 1, 2, \dots, n\}$  para algún conjunto de constantes  $a_1, a_2, \dots, a_n$  y  $b_1, b_2, \dots, b_n$ . Supongamos que  $\mathbf{G}$  es una función continua de  $D \subset \mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$  con la propiedad de que  $\mathbf{G}(x) \in D$  siempre que  $x \in D$ . Entonces  $\mathbf{G}$  tiene un punto fijo en  $D$ .*

Supongamos, además, que todas las funciones componentes de  $\mathbf{G}$  tienen derivadas parciales continuas y que existe una constante  $K < 1$  con

$$\left| \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} \right| \leq \frac{K}{n}, \text{ de modo que } x \in D$$

para cada  $j = 1, 2, \dots, n$  y cada función componente  $g_i$ . Entonces la sucesión  $(x^{(k)})_{k=0}^{\infty}$  definida por una  $x^{(0)}$  seleccionada arbitrariamente en  $D$  y generada por

$$x^{(k)} = G(x^{(k-1)}), \text{ para cada } k \geq 1$$

converge en el único punto fijo  $\mathbf{p} \in D$  y

$$\|x^{(k)} - \mathbf{p}\|_{\infty} \leq \frac{K^k}{1-K} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_{\infty}$$

### 1.3.2. Método de Newton para Sistemas No Lineales

Para aplicar el Método de Newton, se requiere obtener una matriz

$$A(x) = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

donde todos los elementos  $a_{ij}(x)$  son una función de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}$ , de modo que

$$G(x) = x - A(x)^{-1}F(x)$$

converja cuadráticamente a la solución de  $F(x) = 0$ , suponiendo que  $A(x)$  es no singular en el punto fijo  $\mathbf{p}$  de  $\mathbf{G}$ .

**Teorema 1.7.** Sea  $\mathbf{p}$  una solución de  $\mathbf{G}(\mathbf{x})=\mathbf{x}$ . Suponga que existe un número  $\delta > 0$  con

- (i)  $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$  es continua en  $N_{\delta} = \{x : \|x - \mathbf{p}\| < \delta\}$ , para cada  $i = 1, 2, \dots, n$  y  $j = 1, 2, \dots, n$ ;
- (ii)  $\frac{\partial^2 g_i}{\partial x_j \partial x_k}$  es continua y  $\left| \frac{\partial^2 g_i(x)}{\partial x_j \partial x_k} \right| \leq M$  para alguna constante  $M$ , siempre que  $x \in N_{\delta}$ , para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$  y  $k = 1, 2, \dots, n$ ;
- (iii)  $\frac{\partial g_i(\mathbf{p})}{\partial x_k} = 0$ , para cada  $i = 1, 2, \dots, n$  y  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Entonces existe un número  $\hat{\delta} \leq \delta$  tal que la sucesión generada por  $x^{(k)} = G(x^{(k-1)})$  converge cuadráticamente a  $\mathbf{p}$  para cualquier elección de  $x^{(0)}$  a condición de que  $\|x^{(0)} - \mathbf{p}\| < \hat{\delta}$ . Más aún,

$$\|x^{(k)} - \mathbf{p}\|_{\infty} \leq \frac{n^2 M}{2} \|x^{(k-1)} - \mathbf{p}\|_{\infty}^2, \quad \text{para cada } k \geq 1 \quad (1.28)$$

Para utilizar el teorema 1.7 supongamos que  $A(x)$  es una matriz de funciones de  $n \times n$  de  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}$  en la forma de la ecuación (1.27), cuyas entradas específicas se escogerán más adelante. Supongamos además que  $A(x)$  es no singular cerca de una solución  $\mathbf{p}$  de  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  y denotemos con  $b_{ij}(x)$  la entrada de  $A(x)^{-1}$  en el  $i$ -ésimo renglón y en la  $j$ -ésima columna.

Para  $G(x) = x - A(x)^{-1}F(x)$ , tenemos

$$g_i(x) = x_i - \sum_{j=1}^n b_{ij}(x) f_j(x)$$

Entonces:

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_k}(x) = \begin{cases} 1 - \sum_{j=1}^n \left( b_{ij}(x) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) + \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k}(x) f_j(x) \right), & \text{si } i = k \\ - \sum_{j=1}^n \left( b_{ij}(x) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) + \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k}(x) f_j(x) \right), & \text{si } i \neq k \end{cases}$$

El teorema 1.7 implica que necesitamos  $\frac{\partial g_i(p)}{\partial x_k} = 0$ , para cada  $i = 1, 2, \dots, n$  y

$k = 1, 2, \dots, n$ .

Esto significa que:

(i) Para  $i = k$ ,

$$0 = 1 - \sum_{j=1}^n b_{ij}(p) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p)$$

esto es,

$$\sum_{j=1}^n b_{ij}(p) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) = 1 \quad (1.29)$$

(ii) Para  $i \neq k$ ,

$$0 = - \sum_{j=1}^n b_{ij}(p) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p)$$

por lo que,

$$\sum_{j=1}^n b_{ij}(p) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) = 0 \quad (1.30)$$

**Definición 1.16.** La matriz Jacobiana,  $J(x)$ , es una matriz formada por las derivadas parciales de primer orden de una función.

Así pues, la matriz Jacobiana de  $f$  viene dada por:

$$J(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

Las condiciones (1.29) y (1.30) requieren que  $A(p)^{-1}J(p) = I$ , la matriz identidad, por lo que  $A(p) = J(p)$ .

En consecuencia, una elección apropiada de  $A(x)$  es  $A(x) = J(x)$ , dado que cumple la condición (iii) del teorema 1.7. La función  $\mathbf{G}$  está definida por  $G(x) = x - J(x)^{-1}F(x)$ , y el procedimiento de iteración funcional es consecuencia de seleccionar  $x^{(0)}$  y generar, para  $k = 1, 2, \dots, n$ , con la inversa de la matriz Jacobiana  $J(x)^{-1}$

$$x^{(k)} = G(x^{(k-1)}) = x^{(k-1)} - J(x^{(k-1)})^{-1} F(x^{(k-1)}) \quad (1.32)$$

Esta ecuación representa el procedimiento del Método de Newton para resolver sistemas no lineales. Sin embargo, en lugar de resolver la ecuación  $f(x) = 0$ , se está resolviendo el sistema no lineal  $F(x) = 0$ .

**Observación 4.** La debilidad del método de Newton se debe a la necesidad de calcular e invertir la matriz  $J(x)$  en cada paso.

### 1.3.3. Método de Broyden

Aquí estudiaremos una generalización del método de la secante para sistemas de ecuaciones no lineales. Como se sabe, en el método de la secante utilizamos la aproximación

$$f'(x_1) \approx \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

como sustituto de  $f'(x_1)$  en el método de Newton de una sola variable.

En el caso de los sistemas no lineales,  $x^{(1)} - x^{(0)}$  es un vector, así que el cociente correspondiente está indefinido. Sin embargo, el método procede de manera semejante en que reemplazamos la matriz  $J(x^{(1)})$  en el método de Newton para sistemas por una matriz  $A_1$  que tiene la siguiente propiedad

$$A_1 (x^{(1)} - x^{(0)}) = F(x^{(1)}) - F(x^{(0)}) \quad (1.33)$$

Cualquier vector distinto de cero en  $\mathbb{R}^n$  puede escribirse como la suma de un múltiplo de  $x^{(1)} - x^{(0)}$  y de un múltiplo de un vector en el complemento ortogonal de  $x^{(1)} - x^{(0)}$ . Por tanto, si queremos definir específicamente la matriz  $A_1$ , necesitamos determinar cómo actúa sobre el complemento ortogonal de  $x^{(1)} - x^{(0)}$ . Dado que no se tiene información sobre el cambio de  $\mathbf{F}$  en una dirección ortogonal a  $x^{(1)} - x^{(0)}$  requerimos especificar que no hay cambio en esta dirección, es decir

$$A_1 z = J(x^{(0)}) z, \text{ cuando } (x^{(1)} - x^{(0)})^t z = 0 \quad (1.34)$$

Así, cualquier vector ortogonal a  $x^{(1)} - x^{(0)}$  no se ve afectado por la actualización de  $J(x^{(0)})$ , que sirvió para calcular  $x^{(1)}$ , a  $A_1$ , que se usa para determinar  $x^{(2)}$ .

Las condiciones (1.33) y (1.34) definen de manera única a  $A_1$  como

$$A_1 = J(x^{(0)}) + \frac{[F(x^{(1)}) - F(x^{(0)}) - J(x^{(0)})(x^{(1)} - x^{(0)})] (x^{(1)} - x^{(0)})^t}{\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_2^2}$$

Esta matriz es la que se usa en lugar de  $J(x^{(1)})$  para determinar  $x^{(2)}$  como  $x^{(2)} = x^{(1)} - A_1^{-1} F(x^{(1)})$

Una vez determinada  $x^{(2)}$ , el método se repite para determinar  $x^{(3)}$ , usando  $A_1$  en lugar de  $A_0 = J(x^{(0)})$  y con  $x^{(2)}$  y  $x^{(1)}$  en lugar de  $x^{(1)}$  y  $x^{(0)}$ .

En general, una vez que hemos determinado  $x^{(i)}$ , calculamos  $x^{(i+1)}$  por medio de

$$A_i = A_{i-1} + \frac{y_i - A_{i-1}S_i}{\|s_i\|_2^2} s_i^i \quad (1.35)$$

y

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} - A_i^{-1} F(x^{(i)}) \quad (1.36)$$

donde la notación  $y_i = F(x^{(i)}) - F(x^{(i-1)})$  y  $s_i = x^{(i)} - x^{(i-1)}$  se introduce para simplificar las ecuaciones.

Si el método se aplica como se describe en las ecuaciones (1.35) y (1.36), el número de evaluaciones de funciones escalares disminuye de  $n^2 + n$  a  $n$ , pero todavía se requieren  $O(n^3)$  cálculos para resolver el sistema lineal de  $n \times n$  asociado

$$A_i s_{i+1} = -F(x^{(i)}) \quad (1.37)$$

## Capítulo 2

### El Resultado Principal

Es este capítulo abordaremos la solución del problema operacional

$$Au = \lambda F(u) \quad (2.1)$$

que fue presentado en la introducción, donde:  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^t \in \mathbb{R}^n$ ,  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función vectorial dada por  $F(u) = (f_1(u_1), f_2(u_2), \dots, f_n(u_n))^t$ ,  $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  y son continuas.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Para resolver (2.1), primero consideramos el problema del autovalor:

$$Au = \lambda u; \quad \lambda \in \mathbb{R}^+ \quad (2.2)$$

Cuyas soluciones no triviales, gracias a Gregory-Karney [7] pueden ser halladas cuando  $\lambda$  es igual a uno de los autovalores

$$\lambda_h = 4 \operatorname{sen}^2 \left( \frac{h\pi}{2(n+1)} \right), \quad h = 1, 2, \dots, n \quad (2.3)$$

de  $A$ , y son los múltiplos no triviales de los correspondientes autovectores

$$e^h = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \left( \operatorname{sen} \left( \frac{h\pi}{n+1} \right), \operatorname{sen} \left( \frac{2h\pi}{n+1} \right), \dots, \operatorname{sen} \left( \frac{nh\pi}{n+1} \right) \right), \quad h = 1, 2, \dots, n \quad (2.4)$$



Los cuáles satisfacen:

$$\langle e^i, e^j \rangle = \begin{cases} 0 & , \quad i \neq j, \\ 1 & , \quad i = j, \end{cases} \quad i, j, = 1, 2, \dots, n$$

En general la función  $F$  satisface determinadas condiciones, que provienen de la naturaleza del fenómeno observado. En nuestro caso estudiaremos un caso típico.

( $H_1$ ) Para cualquier  $z$  y  $h = 1, 2, \dots, n$

$$\int_0^z f_h(s)ds \geq 0 \quad \text{y} \quad f_h(z) = \theta(z) \quad \text{cuando } z \rightarrow 0$$

Observe que esta condición implica:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f_h(z)}{z} = 0$$

Por lo que  $f_h$  es superlineal en cero.

( $H_2$ ) Existen constantes  $a_1, a_2 > 0$  y  $\alpha > 2$  tal que:

$$\int_0^z f_h(s)ds \geq a_1|z|^\alpha - a_2 \quad (2.5)$$

**Observación 5.** *Un ejemplo de función  $f_h$  que satisface ( $H_1$ ) y ( $H_2$ ) es  $f_h(z) = z^2$*

Con la finalidad de resolver (2.1) aplicando nuestro método introducimos la función  $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por: (funcional asociada al problema 2.1)

$$J(u) = \frac{1}{2}u^t Au - \lambda \sum_{h=1}^n \int_0^{u_h} f_h(s)ds \quad \forall u \in \mathbb{R}^n \quad (2.6)$$

Obviamente  $J \in C'(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  (pues el primer sumando es una forma cuadrática, y el segundo es la suma de funciones derivables continuas). Además la derivada de Fréchet de  $J$  está dado por:

$$J'(u) \equiv \nabla J(u) = Au - \lambda F(u)$$

Por lo que:

$$u \text{ es solución de (2.1)} \iff J'(u) = 0 \left( \text{i.e. } \frac{\partial J}{\partial u_n}(u) = 0; \quad h = 1, 2, \dots, n \right) \quad (2.7)$$

esto es, los puntos críticos de (2.6) corresponden a las soluciones de (2.1).

El siguiente teorema nos dice que (2.1) posee una solución no trivial.

**Teorema 2.1.** *Suponga que  $f_h \in C(\mathbb{R})$ ,  $h = 1, 2, \dots, n$  y que satisfacen las condiciones  $(H_1)$  y  $(H_2)$ . Entonces, para  $\lambda > 0$ , el sistema (2.1) tiene una solución no trivial.*

**Demostración:** Para  $u \in \mathbb{R}^n$ , definimos

$$\|u\|_p = \left( \sum_{h=1}^n |u_h|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para } p > 1 \quad (2.8)$$

que resulta ser una norma en  $\mathbb{R}^n$ . Como todas las normas en espacios de dimensión finita son equivalentes, existen  $C_1, C_2 > 0$  con  $C_1 \leq C_2$  tal que

$$C_1 \|u\|_p \leq \|u\|_2 \leq C_2 \|u\|_p \quad \forall u \in \mathbb{R}^n \quad (2.9)$$

Consideremos ahora los autovalores definidos por (2.3) y denotemos con

$$\lambda_{max} = \max \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \}$$

y

$$\lambda_{min} = \min \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \}$$

Ahora, gracias a  $(H_2)$  y la equivalencia de normas se tiene:

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2} u^t A u - \lambda \sum_{h=1}^n \int_0^{u_h} f_h(s) ds \\ &\leq \frac{1}{2} |u^t| |A u| - \lambda a_1 \sum_{h=1}^n |u_h|^\alpha + \lambda a_2 n \\ &\leq \frac{1}{2} |\lambda| |u|_2^2 - \lambda a_1 \left( \frac{1}{C_2} \right)^\alpha |u|_2^\alpha + \lambda a_2 n \\ &\leq \frac{1}{2} \lambda_{max} |u|_2^2 - \lambda a_1 \left( \frac{1}{C_2} \right)^\alpha |u|_2^\alpha + \lambda a_2 n = P \end{aligned}$$

De donde se sigue que existe  $P > 0$  tal que

$$J(u) \leq P, \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$$

Esto es  $J$  es acotado superiormente.

Sea ahora

$$C_0 = \sup_{u \in \mathbb{R}^n} J(u)$$

Observemos que, como  $\alpha > 2$  entonces

$$J(u) \leq |u|_2^2 \left( \frac{1}{2} \lambda_{max} - \lambda_{a_1} \left( \frac{1}{C_2} \right)^\alpha |u|_2^{\alpha-2} \right) + \lambda_{max} a_2 n \rightarrow -\infty$$

Si  $|u|_2 \rightarrow +\infty$ , donde

$$|u|_2 = \left( \sum_{i=1}^n |u_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Luego:

$$\lim_{|u|_2 \rightarrow +\infty} J(u) = -\infty$$

Lo que significa que  $-J(u)$  es coercivo.

Como  $-J(u)$  es continuo, se sigue del corolario 1.5.3 que existe un punto  $u_0 \in \mathbb{R}^n$  tal que:

$$-J(u_0) = \inf_{u \in \mathbb{R}^n} (-J(u))$$

Esto es que existe  $u_0 \in \mathbb{R}^n$  tal que:

$$J(u_0) = \max_{u \in \mathbb{R}^n} J(u)$$

Es conocido que  $u_0$  corresponde a un punto crítico de  $J$ , esto es

$$J'(u_0) = 0$$

Por lo tanto, de lo observado en (2.7), la ecuación (2.1) admite solución, además:

$$J(u_0) = C_0$$

es el máximo global.

Probaremos ahora que  $C_0 > 0$  (luego la solución  $u_0$  es no trivial). En efecto, en virtud de  $(H_1)$  se tiene:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\int_0^z f_h(s) ds}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f_h(z)}{2z} = 0, \quad h = 1, 2, \dots, n$$

por la regla de *L'Hôpital*. Luego para  $\epsilon = \frac{1}{4} \frac{\lambda_{min}}{\lambda} > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$\left| \int_0^z f_h(s) ds \right| \leq \frac{1}{4} \lambda_{min} \frac{|z|^2}{\lambda}, \quad \text{para } |z| \leq \delta$$

lo que implica

$$\begin{aligned} J(u) = \frac{1}{2}u^T Au - \lambda \sum_{h=1}^n \int_0^{u_h} f_h(s)ds &\geq \frac{1}{2}\lambda_{\min}|u|_2^2 - \frac{1}{4}\lambda_{\min}|u|_2^2 \\ &= \frac{1}{4}\lambda_{\min}|u|_2^2, \quad \text{para } |u|_2 \leq \delta \end{aligned}$$

Por tanto

$$C_0 \geq J(u) \geq \frac{1}{4}\lambda_{\min}|u|_2^2 = \frac{1}{4}\lambda_{\min}\delta^2 > 0$$

Esto concluye la prueba del teorema. ■

## 2.1. Aplicación

Consideremos nuestro problema modelo

$$\Delta^2 u_{h-1} + \lambda |u_h|^{\alpha_h} \text{sign} u_h = 0, \quad h = 1, 2, \dots, n \quad (2.10)$$

con la condición de frontera  $u_0 = 0 = u_{n+1}$  y  $\lambda > 0$ ,  $\alpha_h > 1$ ,  $h = 1, 2, \dots, n$ .

Se tiene:

$$\begin{aligned} (H_1) \quad \int_0^z |s|^{\alpha_h} \text{sign} s ds &= \frac{|z|^{\alpha_h+1}}{\alpha_h+1} \geq 0 \\ \lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|^{\alpha_h} \text{sign} z}{z} &= \lim_{z \rightarrow 0} |z|^{\alpha_h-1} = 0 \end{aligned}$$

y

$$(H_2) \quad \int_0^z |s|^{\alpha_h} \text{sign} s ds = \frac{|z|^{\alpha_h+1}}{\alpha_h+1} \geq a_1 |z|^\alpha - a_2 \quad \text{donde } a_1 = \frac{1}{\alpha_h+1}, \quad a_2 = 1, \quad \alpha = \alpha_h + 1 > 2$$

Por lo que todas las condiciones del teorema están satisfechas. Luego la ecuación (2.10) posee una solución no trivial.

## Capítulo 3

# Simulación Numérica

Es este capítulo, realizaremos el análisis de tres sistemas de ecuaciones no lineales aplicando los resultados del teorema 2.1 y obteniendo la aproximación numérica de la solución no trivial utilizando MATLAB.

### Ejemplo 3.1

Se considera el sistema (3.1) que se encuentra en la condición del Teorema 2.1, probando la existencia de la solución no trivial.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 2x_1 - x_2 & = & x_1^2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 & = & x_2^2 \\ -x_1 + 2x_3 - x_4 & = & x_3^2 \\ -x_3 + 2x_4 & = & x_4^2 \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Este sistema puede ser escrito en la forma (2.1) con

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}; \quad \lambda = 1; \quad F(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \\ x_4^2 \end{bmatrix} \quad (\text{ con } x \equiv u \in \mathbb{R}^4)$$

La función  $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  dada aquí, satisface  $(H_1)$  y  $(H_2)$ , en efecto:

$$\begin{aligned} (H_1) \quad & \int_0^z s^2 ds = \frac{|z|^3}{3} \geq 0 \\ & \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{z} = 0 \\ & \text{y} \\ (H_2) \quad & \int_0^z s^2 ds = \frac{|z|^3}{3} \geq \frac{1}{3} |z|^3 - 1 \end{aligned}$$

Entonces, por el teorema 2.1, admite solución no trivial.

Introducimos los Métodos de Newton y Broyden para obtener una aproximación numérica de la solución no trivial del sistema (3.1), y luego utilizando MATLAB comparamos dichos métodos. (Ver Figura 3.1)

**broyden4**

ATRAS

**FUNCIONES**

f1(x,y,z,w)=

f2(x,y,z,w)=

f3(x,y,z,w)=

f4(x,y,z,w)=

Aproximacion Inicial X=[x1 ; x2 ; x3 ; x4]:

Tolerancia:

Iteraciones Maximas:

CALCULAR

SALIR

---

**SOLUCION CON EL METODO DE NEWTON**

|   | x      | y      | z      | w      | f1(x,y,z,w) | f2(x,y,z,w) | f3(x,y,z,w) | f4(x,y,z,w) |
|---|--------|--------|--------|--------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1 | 0.2471 | 0.4353 | 0.4353 | 0.2471 | -0.0022     | -0.0012     | -0.0012     | -0.0022     |
| 2 | 0.2452 | 0.4302 | 0.4302 | 0.2452 | -3.6220e-06 | -2.5811e-05 | -2.5811e-05 | -3.6220e-06 |
| 3 | 0.2451 | 0.4302 | 0.4302 | 0.2451 | -1.1117e-09 | -2.9115e-09 | -2.9115e-09 | -1.1117e-09 |
| 4 | 0.2451 | 0.4302 | 0.4302 | 0.2451 | -3.1739e-18 | -4.9490e-17 | -4.9490e-17 | -3.1739e-18 |

**SOLUCION CON EL METODO DE BROYDEN**

|   | x      | y      | z      | w      | f1(x,y,z,w) | f2(x,y,z,w) | f3(x,y,z,w) | f4(x,y,z,w) |
|---|--------|--------|--------|--------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1 | 0.2471 | 0.4353 | 0.4353 | 0.2471 | -0.0400     | 0.0400      | 0.0400      | -0.0400     |
| 2 | 0.2448 | 0.4297 | 0.4297 | 0.2448 | -0.0022     | -0.0012     | -0.0012     | -0.0022     |
| 3 | 0.2451 | 0.4302 | 0.4302 | 0.2451 | 1.2340e-05  | 2.5635e-04  | 2.5635e-04  | 1.2340e-05  |
| 4 | 0.2451 | 0.4302 | 0.4302 | 0.2451 | -6.6104e-06 | 6.4558e-06  | 6.4558e-06  | -6.6104e-06 |
| 5 | 0.2451 | 0.4302 | 0.4302 | 0.2451 | -2.3190e-07 | 1.1402e-07  | 1.1402e-07  | -2.3190e-07 |
| 6 | 0.2451 | 0.4302 | 0.4302 | 0.2451 | -6.4352e-09 | 3.2932e-09  | 3.2932e-09  | -6.4352e-09 |

Figura 3.1: Solución No Trivial del Ejemplo 3.1

## Ejemplo 3.2

Ahora consideraremos el sistema en  $\mathbb{R}^2$ , que cumple las condiciones del Teorema 2.1, además probando la existencia de la solución no trivial.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 &= \operatorname{sign}(x_1) [e^{x_1} + e^{-x_1} - 2] \\ -x_1 + 2x_2 &= \operatorname{sign}(x_2) [e^{x_2} + e^{-x_2} - 2] \end{cases} \quad (3.2)$$

Este sistema puede ser escrito en la forma (2.1) con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \quad \lambda = 1;$$

$$F(x) = \begin{bmatrix} \operatorname{sign}(x_1) [e^{x_1} + e^{-x_1} - 2] \\ \operatorname{sign}(x_2) [e^{x_2} + e^{-x_2} - 2] \end{bmatrix} \quad (\text{con } x \equiv u \in \mathbb{R}^2)$$

La función  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada aquí, satisface  $(H_1)$  y  $(H_2)$ , en efecto:

$$(H_1) \quad \int_0^z \operatorname{sign}(s) [e^s + e^{-s} - 2] ds = e^{|z|} - e^{-|z|} - 2|z| \geq 0$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sign}(z) [e^z + e^{-z} - 2]}{z} = 0$$

y

$$(H_2) \quad \int_0^z \operatorname{sign}(s) [e^s + e^{-s} - 2] ds = e^{|z|} - e^{-|z|} - 2|z| = \frac{|z|^3}{3} + \dots \geq \frac{1}{3}|z|^3 - 1$$

Entonces, por el teorema 2.1, admite solución no trivial.

Similar al Ejemplo 3.1, utilizando MATLAB se obtiene dos aproximaciones numéricas de la solución no trivial del sistema (3.2).



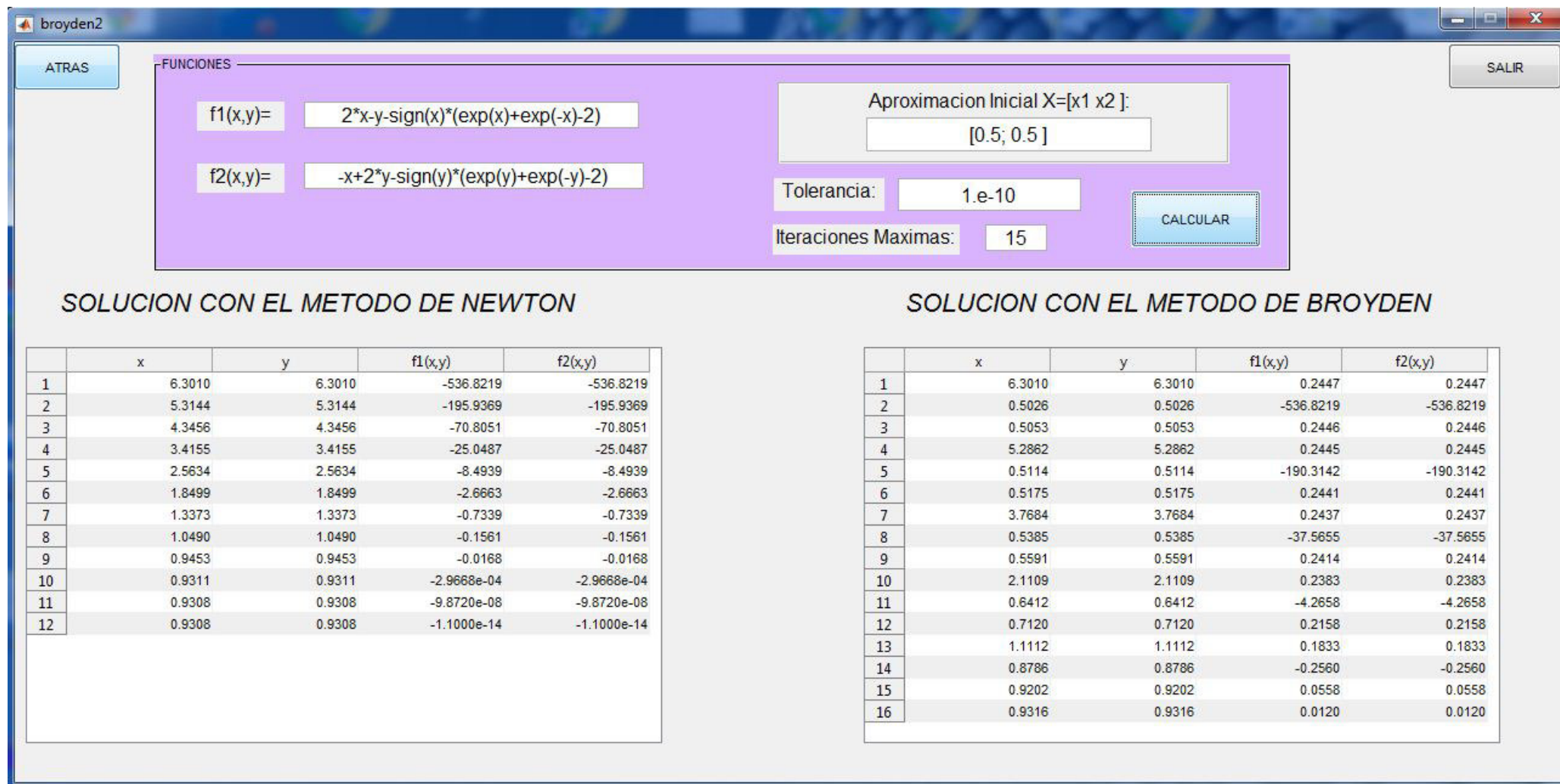


Figura 3.2: Primera Solución No Trivial del Ejemplo 3.2



Figura 3.3: Segunda Solución No Trivial del Ejemplo 3.2

### Ejemplo 3.3

Tomando como referencia los ejemplos anteriores, se tiene el sistema (3.3), con las condiciones del Teorema 2.1 y probando la existencia de la solución no trivial.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 &= \operatorname{sign}(x_1) [e^{x_1} + e^{-x_1} - 2] \\ -x_1 + 2x_2 &= x_2^2 \end{cases} \quad (3.3)$$

Este sistema puede ser escrito en la forma (2.1) con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \quad \lambda = 1$$
$$F(x) = \begin{bmatrix} \operatorname{sign}(x_1) [e^{x_1} + e^{-x_1} - 2] \\ x_2^2 \end{bmatrix} \quad (\text{con } x \equiv u \in \mathbb{R}^2)$$

La función  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada aquí, satisface  $(H_1)$  (Ver Ejemplo 3.2) y  $(H_2)$  (Ver Ejemplo 3.1).

Entonces, por el teorema 2.1, admite solución no trivial.

Utilizando MATLAB se tiene dos aproximaciones numéricas de la solución no trivial del sistema anterior (Ver Figuras 3.4 y 3.5).

broyden2

ATRAS

FUNCIONES

f1(x,y)=  $2*x-y*\text{sign}(x)*(\exp(x)+\exp(-x)-2)$

f2(x,y)=  $-x+2*y-y^2$

Aproximacion Inicial X=[x1 x2 ]:  
[1.5; 1.5]

Tolerancia: 1.e-10

Iteraciones Maximias: 30

CALCULAR

SALIR

### SOLUCION CON EL METODO DE NEWTON

|   | x      | y      | f1(x,y)     | f2(x,y)     |
|---|--------|--------|-------------|-------------|
| 1 | 1.1386 | 1.1114 | -0.2769     | -0.1510     |
| 2 | 1.0298 | 0.9218 | -0.0198     | -0.0359     |
| 3 | 0.9933 | 0.9182 | -0.0021     | -1.2970e-05 |
| 4 | 0.9930 | 0.9162 | -1.7319e-07 | -3.8954e-06 |
| 5 | 0.9930 | 0.9162 | -2.1234e-11 | -1.1021e-12 |

### SOLUCION CON EL METODO DE BROYDEN

|    | x      | y      | f1(x,y)     | f2(x,y)     |
|----|--------|--------|-------------|-------------|
| 1  | 1.1386 | 1.1114 | -1.2048     | -0.7500     |
| 2  | 1.0138 | 1.0477 | -0.2769     | -0.1510     |
| 3  | 0.8566 | 1.1755 | -0.1390     | -0.0161     |
| 4  | 1.0527 | 0.8928 | -0.2421     | 0.1126      |
| 5  | 1.0003 | 0.8963 | -0.0018     | -0.0642     |
| 6  | 0.9829 | 0.9241 | 0.0174      | -0.0110     |
| 7  | 0.9919 | 0.9163 | -0.0047     | 0.0114      |
| 8  | 0.9929 | 0.9163 | 2.2172e-04  | 0.0011      |
| 9  | 0.9930 | 0.9162 | 5.4840e-06  | 1.2152e-04  |
| 10 | 0.9930 | 0.9162 | -8.1723e-07 | -4.2544e-06 |
| 11 | 0.9930 | 0.9162 | -1.4968e-08 | -1.0851e-07 |
| 12 | 0.9930 | 0.9162 | 1.5911e-10  | 1.1062e-09  |

Figura 3.4: Primera Solución No Trivial del Ejemplo 3.3

**broyden2**

ATRAS

**FUNCIONES**

f1(x,y)=  $2*x-y*\text{sign}(x)*(exp(x)+exp(-x)-2)$

f2(x,y)=  $-x+2*y-y^2$

Aproximacion Inicial X=[x1 x2]:  
[-2; -2]

Tolerancia: 1.e-10

Iteraciones Maximas: 30

CALCULAR

SALIR

---

**SOLUCION CON EL METODO DE NEWTON**

|   | x       | y       | f1(x,y)     | f2(x,y)     |
|---|---------|---------|-------------|-------------|
| 1 | -1.5343 | -0.9224 | 0.7074      | -1.1613     |
| 2 | -1.3832 | -0.5810 | 0.0530      | -0.1165     |
| 3 | -1.3753 | -0.5417 | 1.3056e-04  | -0.0015     |
| 4 | -1.3755 | -0.5413 | 7.0520e-08  | -1.9570e-07 |
| 5 | -1.3755 | -0.5413 | -4.1468e-17 | -4.0163e-15 |

**SOLUCION CON EL METODO DE BROYDEN**

|   | x       | y       | f1(x,y)     | f2(x,y)     |
|---|---------|---------|-------------|-------------|
| 1 | -1.5343 | -0.9224 | 3.5244      | -6          |
| 2 | -1.4164 | -0.6621 | 0.7074      | -1.1613     |
| 3 | -1.3715 | -0.5540 | 0.1941      | -0.3461     |
| 4 | -1.3696 | -0.5410 | 0.0059      | -0.0434     |
| 5 | -1.3717 | -0.5408 | -0.0101     | -0.0052     |
| 6 | -1.3756 | -0.5413 | -0.0068     | -0.0024     |
| 7 | -1.3755 | -0.5413 | 1.3971e-04  | 4.3263e-05  |
| 8 | -1.3755 | -0.5413 | -7.5188e-07 | -6.7975e-08 |
| 9 | -1.3755 | -0.5413 | 4.7233e-09  | 2.2804e-09  |

Figura 3.5: Segunda Solución No Trivial del Ejemplo 3.3

### Ejemplo 3.4 [Aplicación fenómeno físico]

Tenemos las ecuaciones (4), (5) y (6) provenientes del fenómeno físico de enfriamiento, considerando el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} \text{sign}(x_1)(e^{x_1} + e^{-x_1} - 2) \\ \text{sign}(x_2)(e^{x_2} + e^{-x_2} - 2) \\ \text{sign}(x_3)(e^{x_3} + e^{-x_3} - 2) \\ \text{sign}(x_4)(e^{x_4} + e^{-x_4} - 2) \end{bmatrix}$$

con  $u_0 = u_5$ .

Los  $f_n$  satisface  $(H_1)$  y  $(H_2)$ , y por el teorema 2.1 tiene una solución no trivial.

Utilizando MATLAB se tiene dos aproximaciones numéricas de la solución no trivial del sistema anterior (Ver Figuras 3.6 y 3.7).



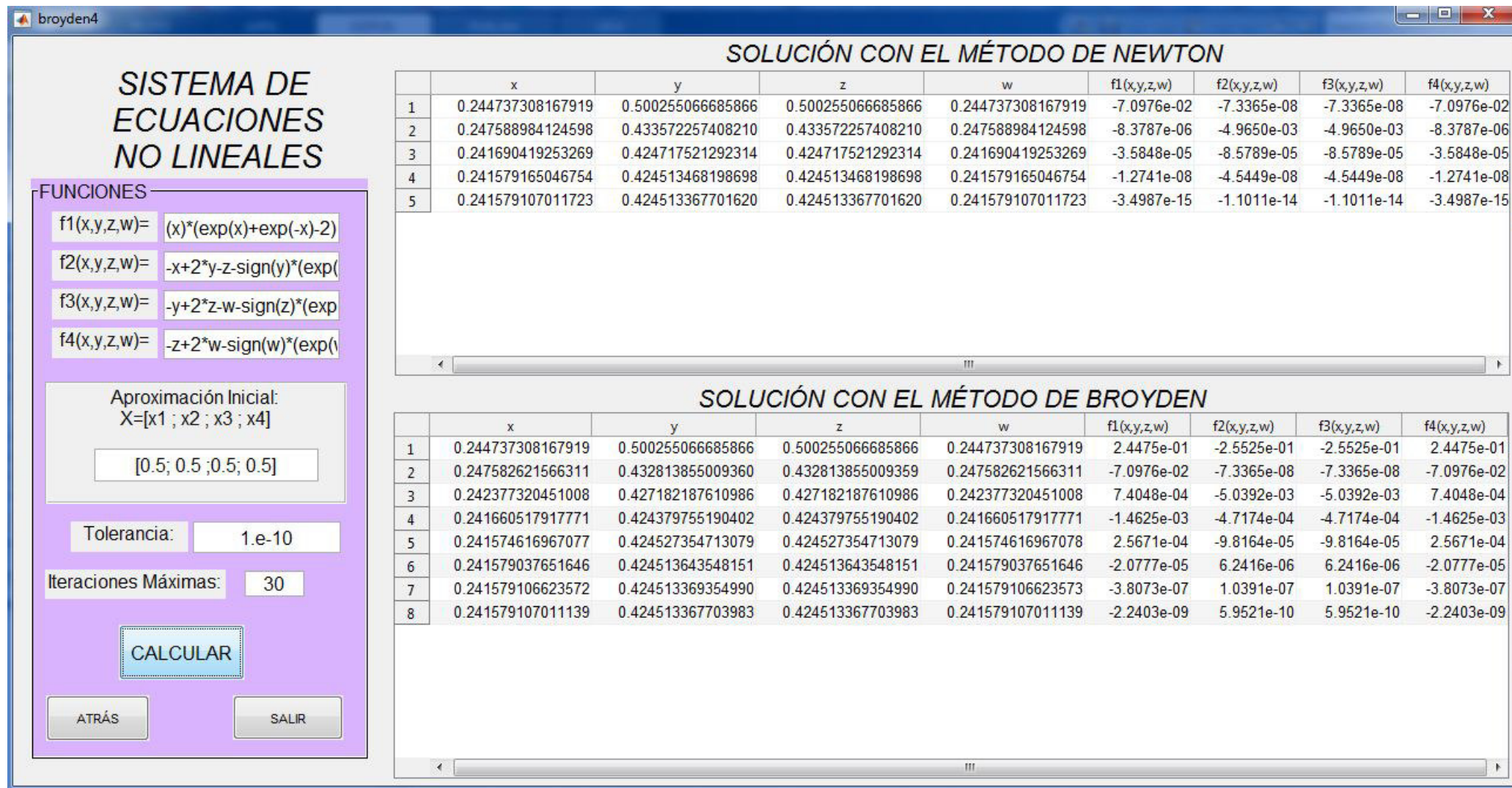


Figura 3.6: Primera Solución No Trivial del Ejemplo 3.4

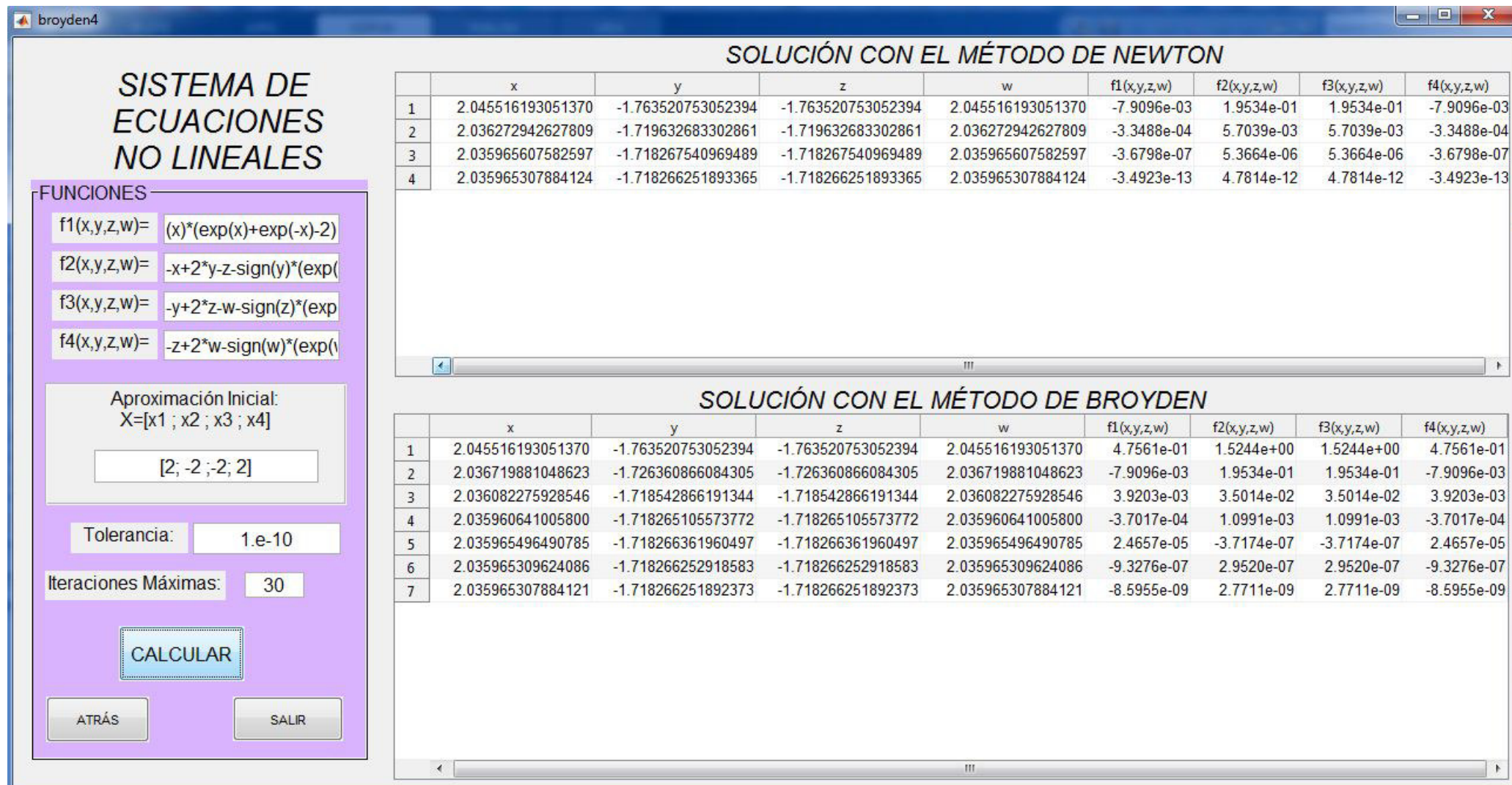


Figura 3.7: Segunda Solución No Trivial del Ejemplo 3.4



# Anexos

## Algoritmo de Newton

---

**Algoritmo 1:** MÉTODO DE NEWTON PARA SISTEMAS

---

**Entrada:** Número  $n$  de ecuaciones e incógnitas; aproximación inicial

$x = (x_1, \dots, x_n)^t$ , tolerancia TOL; número máximo de iteraciones  $N$

**Salida:** Solución aproximada  $x = (x_1, \dots, x_n)^t$  o un mensaje de que se rebasó el número de iteraciones

```
1 inicio
2    $k = 1$ 
3   mientras ( $k \leq N$ ) hacer
4       Calcule  $F(X)$  y  $J(x)$ , donde  $J(x)_{ij} = (\partial f_i(x) / \partial x_j)$  para
5            $i \leq i, j \leq n$ 
6       Resuelva el sistema lineal  $J(x)y = -F(x)$ , de  $n \times n$ 
7       Haga  $x = x + y$ 
8       Si  $\|y\| < TOL$  entonces Salida Procedimiento terminado con éxito
9       Haga  $k = k + 1$ 
9   fin
10 fin
```

---

**Salida:** *Procedimiento terminado sin éxito*

---

# Algoritmo de Broyden

---

**Algoritmo 2:** MÉTODO DE BROYDEN PARA SISTEMAS

---

**Entrada:** Número  $n$  de ecuaciones e incógnitas; aproximación inicial

$x = (x_1, \dots, x_n)^t$ , tolerancia TOL; número máximo de iteraciones  $N$

**Salida:** Solución aproximada  $x = (x_1, \dots, x_n)^t$  o un mensaje de que excedió el número de iteraciones

```
1 inicio
2   Tomar  $A_0 = J(x)$ , donde  $J(x)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$  para  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $v = F(x)$ 
3   Tomar  $A = A_0^{-1}$  (eliminación Gaussiana)
4   Tomar  $s = -Av$ ;  $x = x + s$ ;  $k = 2$ 
5   mientras ( $k \leq N$ ) hacer
6       Tomar  $w = v$ ;  $v = F(x)$ ;  $y = v - w$ 
7       Tomar  $z = -Ay$ 
8       Tomar  $p = -s^t z$ 
9       Tomar  $u^t = s^t A$ 
10      Tomar  $A = A + \frac{1}{p}(s + z)u^t$ 
11      Tomar  $s = -Av$ 
12      Tomar  $x = x + s$ 
13      Si  $\|s\| < TOL$  entonces Salida Procedimiento terminado con éxito
14      Haga  $k = k + 1$ 
15  fin
16 fin
```

---

**Salida:** *Procedimiento terminado sin éxito*

---

## Códigos de la Implementación en MATLAB

```
1 Xini=get(handles.aproxini,'string');
2 xo=str2num(Xini);
3
4 syms x y z w;
5
6 f1=get(handles.fun1,'string');
7 f2=get(handles.fun2,'string');
8 f3=get(handles.fun3,'string');
9 f4=get(handles.fun4,'string');
10
11 tol=get(handles.tolerancia,'string');
12 tolerancia=str2num(tol);
13
14 itermax=get(handles.itermax,'string');
15 maxiter=str2num(itermax);
16
17 f1=sym(f1);
18 f2=sym(f2);
19 f3=sym(f3);
20 f4=sym(f4);
21 X=[x y z w];
22 ffname=[f1;f2;f3;f4];
```

Código 3.1: Declaración de las funciones

```
1 fprima=jacobian(ffname, [x; y; z;w]);
2 iter = 1;
3 f=ffname;
4 jf=fprima;
5 error=double(norm(subs(f,X,xo'),2));
6 datos1=[];
7 while (error >= tolerancia)
8     fxo=double(subs(f,X,xo'));
9     fpxo=double(subs(jf,X,xo'));
10    x1=xo-inv(fpxo)*fxo ;
11    fx1=double(subs(f,X,x1'));
```

```

12     error =norm((fx1),2);
13     datos1=[datos1 ; x1' fx1'];
14     set(handles.tabla1,'data',datos1);
15     if (iter > maxiter)
16         fprintf(' Numero maximo de iteraciones excedido \n');
17     return;
18 end
19 xo=x1;
20 iter=iter+1;
21 end

```

Código 3.2: Implementación Método de Newton

```

1 x0=str2num(Xini);
2 iter = 1;
3 f=ffname;
4 jf=fprima;
5 error=double(norm(subs(f,X,x0'),2));
6 A=double(subs(jf,X,x0'));
7 v=double(subs(f,X,x0'));
8 A=inv(A);
9 s=-A*v;
10 x0=x0+s;
11 datos2=[];
12 datos2=[datos2 ; x0' v'];
13 set(handles.tabla2,'data',datos2);
14 iter=iter+1;
15 while (error >= tolerancia)
16     w=v;
17     v=double(subs(f,X,x0'));
18     y=v-w;
19     z=-A*y;
20     p=-s'*z;
21     u=s'*A;
22     A=A+(1/p)*(s+z)*u;
23     s=-A*v;
24     x0=x0+s;
25     x1=x0;

```

```

26     fx1=double(subs(f,X,x1'));
27     error =double(norm((fx1),2));
28     datos2=[datos2 ; x0' v'];
29     set(handles.tabla2,'data',datos2);
30     if (iter > maxiter)
31         fprintf(' Numero maximo de iteraciones excedido \n');
32     return;
33     end
34     iter=iter+1;
35 end

```

Código 3.3: Implementación Método de Broyden

# Conclusiones

- 1) El problema (2.1) con las condiciones dadas admite solución no trivial. Para obtener dicha solución se aplicó el Corolario (1.5.3) del Teorema de Weierstrass Generalizado, donde la solución es un punto crítico de la funcional  $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  asociada al problema (2.1).
- 2) Usualmente el Teorema de Weierstrass Generalizado se aplica a sistemas continuos, pero en este trabajo de investigación se implementó para un sistema discreto.
- 3) Para encontrar la solución aproximada no trivial del problema (2.1) se puede adaptar un algoritmo numérico coherente como los Métodos de Newton y Broyden, teniendo en cuenta que se pueden encontrar varias soluciones no triviales, dependiendo de las condiciones iniciales dadas, tales como el ejemplo 3.2 y ejemplo 3.3.
- 4) Para investigaciones futuras se puede utilizar otro método variacional, como por ejemplo el Teorema del Paso de la Montaña, donde también se podría considerar otras condiciones del problema.

# Bibliografía

- [1] BOTELHO, G., PELLEGRINO, D., AND TEIXEIRA, E. *Fundamentos de Análise Funcional*. Textos universitários. SBM, 2015.
- [2] BRÉZIS, H. *Análisis funcional: Teoría y aplicaciones*. Alianza Universidad. Alianza Editorial, 1984.
- [3] BURDEN, R., AND FAIRES, J. *Numerical Analysis*. Brooks/Cole, Cengage Learning, 2011.
- [4] CORREA, F., AND MENEZES, S. Existence of solutions to nonlocal and singular elliptic problems via galerkin method. *Electronic Journal of Differential Equations* (2004).
- [5] DE FIGUEIREDO, D. G. *Lectures on The Ekeland Variational Principle with Applications and Detours*. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1989.
- [6] DEBNATH, L., AND MIKUSINSKI, P. *Introduction to Hilbert Spaces with Applications*. Elsevier Science, 2005.
- [7] GREGORY, R., AND KARNEY, D. *A collection of matrices for testing computational algorithms*. Wiley-Interscience, 1969.
- [8] GUO, Z., AND YU, J. Existence of periodic and subharmonic solutions for second-order superlinear difference equations. *Science in China Series A: Mathematics* 46, 4 (Jul 2003), 506–515.
- [9] KELLEY, W., AND PETERSON, A. *Difference Equations: An Introduction with Applications*. Elsevier Science, 2001.

- [10] KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley Classics Library. Wiley, 1989.
- [11] NIETO, J. *Introducción a los espacios de Hilbert*. Colección de monografías científicas: Serie de matemática. Programa Regional de Desarrollo Científico y Tecnológico, Departamento de Asuntos Científicos, Secretaría General de la Organización de los Estados Americanos, 1978.
- [12] PERESSINI, A., SULLIVAN, F., AND UHL, J. *The Mathematics of Nonlinear Programming*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2012.
- [13] SYDSAETER, K., HAMMOND, P., AND CÓRDOBA, J. *Matemáticas para el análisis económico*. Fuera de colección Out of series. Pearson Educación, 1996.
- [14] ZHANG, G. Existence of non-zero solutions for a nonlinear system with a parameter. *Nonlinear Analysis* 66, 6 (2007), 1410–1416.
- [15] ZHANG, G., AND GAO, Y. Oscillation theory of difference equations. *Higher Education Press* (2001).
- [16] ZHANG, G., AND YANG, Z. Existence of  $2^n$  nontrivial solutions for discrete two-point boundary value problems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications* 59, 7 (2004), 1181 – 1187.